Corrigé du BACCALAURÉAT BLANC

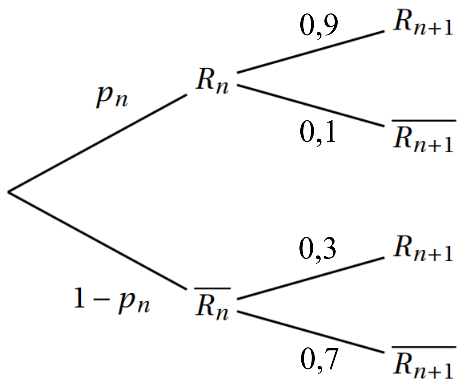
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **MATHÉMATIQUES**

sujet 1 - Lundi 15 avril 2024

Exercice 1 **(5 points)** **Thème : probabilités, suites**

Partie A

1.



0,5 point

2. Soit n un entier naturel. Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}3$$
$$= p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}3 = 0{,}9\,p_n + 0{,}3 - 0{,}3\,p_n$$

0,5 point

Donc on a bien $p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}3$.

3. a. Soit n un entier naturel.

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75$ par définition de la suite (u_n)
$= 0{,}6\,p_n + 0{,}3 - 0{,}75$ d'après la relation de récurrence de la suite (p_n)
$= 0{,}6\,p_n - 0{,}45$
$= 0{,}6(u_n + 0{,}75) - 0{,}45$ par définition de la suite (u_n)
$= 0{,}6\,u_n + 0{,}45 - 0{,}45$
$= 0{,}6\,u_n$

1 point

Donc la suite (u_n) est bien une suite géométrique, de raison $q = 0,6$.
Son premier terme est $u_0 = p_0 - 0{,}75 = 0{,}6 - 0{,}75 = -0{,}15$.

b. On en déduit la forme explicite du terme général :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 \times q^n = -0{,}15 \times 0{,}6^n$.
Or $u_n = p_n - 0{,}75 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0{,}75 = -0{,}15 \times 0{,}6^n + 0{,}75$
Donc $p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n$.

0,5 point

c. La raison de la suite géométrique (u_n) est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite (u_n) converge vers 0.
Par limite d'une somme, on en déduit que la suite (p_n) converge vers $\ell = 0,75$.

0,5 point

d. En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas. *0,5 point*

Partie B

1. Le franchissement d'une haie est une épreuve de Bernoulli à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » de probabilité $p = 0,75$; Cette expérience est répétée dix fois (la course comporte 10 haies) de façon identique et indépendante ; dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$, X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de haies franchies pendant la course). *0,5 point*

On en conclut que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;\,0,75)$.

2. Il s'agit de calculer $p(X = 10)$.

On a $p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^{0} = 0,75^{10} \approx 0,056$. *0,5 point*

La probabilité que l'athlète franchisse les dix haies est donc d'environ 0,056.

3. Il s'agit de calculer $p(X \geqslant 9)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors utiliser la relation : $p(X \geqslant 9) = 1 - p(X < 9) = 1 - p(X \leqslant 8)$ *0,5 point*

La calculatrice donne une valeur approchée au millième près qui est 0,244.

Exercice 2 **(5 points)** **Thème : géométrie dans l'espace**

1. Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}_2\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$. *0,5 point*

Il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$ car $\dfrac{5}{10} \neq \dfrac{2}{14}$ donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, donc ils sont sécants suivant une droite.

On vérifie que la droite $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Soit t un réel quelconque et soit $\mathrm{M}_t(1 + 2t\,;\,-t\,;\,3 - 2t)$ le point de paramètre t de la droite $\mathcal{D}$.

$5\times(1 + 2t) + 2\times(-t) + 4\times(3 - 2t) = 5 + 10t - 2t + 12 - 8t = 17$

donc M_t est aussi un point du plan $\mathcal{P}_1$. *0,75 point*

$10\times(1 + 2t) + 14\times(-t) + 3\times(3 - 2t) = 10 + 20t - 14t + 9 - 6t = 19$

donc M_t est aussi un point du plan $\mathcal{P}_2$.

M_t appartient donc à l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, donc la droite $\mathcal{D}$ est bien l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3. a. $5x_{\mathrm{A}} + 2y_{\mathrm{A}} + 4z_{\mathrm{A}} = 5\times1 + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 5 - 2 - 4 = -1 \neq 17$ *0,5 point*

donc le points A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}_1$.

b. A appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = 1 + 2t \\ y_{\mathrm{A}} = -t \\ z_{\mathrm{A}} = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ -1 = -t \\ -1 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2t \\ 1 = t \\ 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

0,75 point

Ce système n'admet pas de solution donc le point A n'appartient donc pas à la droite $\mathcal{D}$.

4. a. Soit t un réel :

$$f(t) = \mathrm{AM}^2 = (x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{M} - z_\mathrm{A})^2$$
$$= (1 + 2t - 1)^2 + (-t + 1)^2 + (3 - 2t + 1)^2 = (2t)^2 + (-t + 1)^2 + (4 - 2t)^2$$
$$= 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + 16 - 16t + 4t^2 = 9t^2 - 18t + 17$$

0,5 point

b. La distance AM est minimale si et seulement si la distance AM^2 est minimale c'est à dire $f(t)$ est minimale.

f est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant positif.

Donc f admet un minimum pour $t = \dfrac{-(-18)}{2 \times 9} = \dfrac{18}{18} = 1$.

1 point

Le point de $\mathcal{D}$ qui correspond au paramètre $t = 1$ est le point M de coordonnées $(1 + 2 \times 1 \,;\, -1 \,;\, 3 - 2 \times 1)$ c'est à dire $\mathrm{M}(3 \,;\, -1 \,;\, 1)$, ce qu'il fallait démontrer.

5. Un vecteur directeur de la droite (AH) est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{H} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{H} - y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{H} - z_\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -1 + 1 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'après la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1 point

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 2 \times 2 - 1 \times 0 + 2 \times (-2) = 4 + 0 - 4 = 0$

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$. Les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont donc orthogonales.

De plus, d'après la question précédente, le point H appartient à la droite $\mathcal{D}$, il appartient aussi à la droite (AH), ces deux droites sont donc sécantes au point H, elles sont donc perpendiculaires.

Exercice 3 **(5 points)** **Thème : fonction logarithme**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} -8\ln(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} -8\ln(x) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

0,5 point

2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$.

1 point

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2(x^2 - 4)}{x}$.

0,5 point

4. Pour étudier les variations de f sur $]0 \,;\, +\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

1 point

Pour tout $x > 0$, on a $f\,'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $x+2 > 0$ donc $f\,'(x)$ et $x-2$ sont de même signe.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f\,'$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$4-8\ln(2)$	↗	$+\infty$

5. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle, donc continue sur $]0\,;2]$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 4-8\ln(2) \approx -1{,}55 < 0$.

1 point

Sur l'intervalle $]0\,;2]$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]0\,;2]$. On l'appelle α.

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β. On complète le tableau de variations de f et on en déduit le signe de f sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		α		2		β		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f	‖	$+$	0		$-$		0	$+$	

0,5 point

7. Pour tout réel k, on a $g_k(x) = f(x)+k$.

La fonction g_k a donc les mêmes variations que f et elle a donc pour minimum sur $]0\,;+\infty[$ le nombre $4-8\ln(2)+k$. Pour que g_k soit positive ou nulle, il faut que ce minimum soit positif ou nul, donc $4-8\ln(2)+k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 8\ln(2)-4$. *0,5 point*

Donc $8\ln(2)-4$ est la plus petite valeur de k telle que $g_k \geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 **(5 points)** **Thème : suites, fonction exponentielle, algorithmique**

1. Affirmation : **Vraie**

Pour tout entier naturel n : $n \geqslant 0 \Rightarrow n+1 \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$.

De plus, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

D'où $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ car $n+1 > 0$ *1 point*

finalement on a : $-1 \leqslant -\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.

La suite u est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation : **Fausse** *1 point*

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$.

Cette suite est croissante et converge vers 0.

3. Affirmation : **Fausse**

Pour tout entier naturel n, on a $\frac{3n}{2+n} = \frac{3}{\frac{2}{n}+1}$.

1 point

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n}{2+n} = 3 \neq. \frac{3}{2}$.

4. Affirmation : **Fausse**

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

f est de la forme e^u avec $u(x) = -2x^2$. On a $u'(x) = -4x$.

$f' = u'\mathrm{e}^u$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2}$.

f' est de la forme $v\,f$ avec $v(x) = -4x$. On a $v'(x) = -4$ et $f'' = v'f + vf'$ donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \times \mathrm{e}^{-2x^2} - 4x \times (-4x)\mathrm{e}^{-2x^2} = -4\mathrm{e}^{-2x^2} + 16x^2\mathrm{e}^{-2x^2} \\ &= (-4 + 16x^2)\mathrm{e}^{-2x^2} = 4(4x^2 - 1)\mathrm{e}^{-2x^2} = 4(2x+1)(2x-1)\mathrm{e}^{-2x^2} \end{aligned}$$

1 point

Une exponentielle est toujours strictement positive, $f''(x)$ est donc du signe de $(2x+1)(2x-1)$ qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant positif 4 et qui a pour racines $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On en déduit que f'' est positive donc f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, et f'' est négative donc f est concave sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. f n'est donc pas concave sur $[-1\,;1]$.

5. Affirmation : **Vraie**

On initialise M avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à M, si un terme est supérieur à M, il va remplacer M.

1 point

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la liste, soit 7.