BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Lundi 15 avril 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisée

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les traces de recherche, mêmes incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 **(5 points)**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

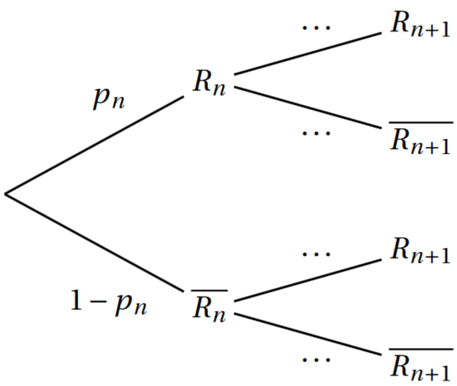
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0{,}75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n.$$

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0, 75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

Exercice 2 **(5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

On considère :

- le point $\mathrm{A}(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3. a. Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.

b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1 + 2t\ ;\ -t\ ;\ 3 - 2t)$.

On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = \mathrm{AM}^2$.

a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

5. On note H le point de coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 3 **(5 points)**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;+\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\ ;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$g_k(x)=x^2-8\ln(x)+k$$

En s'aidant du tableau de variations de f , déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2. Affirmation : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

3. Affirmation : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n}{2+n}=\dfrac{3}{2}$.

4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}$.

Affirmation : La fonction f est concave sur l'intervalle $[-1\ ;1]$.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.
On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste `L`.

```
def mystere(L):
    M = L[0]
    # On initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range(len(L)):
        if L[i] > M:
            M = L[i]
    return M
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([2, 3, 7, 0 ,6, 3, 2, 0, 5])` renvoie 7.