

Cours : Colinéarité

Définition Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Propriété Colinéaire et coordonnées

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition Déterminant

Soient \vec{u} et \vec{v} , deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. Le **déterminant** de \vec{u} et \vec{v} est le réel $x_u y_v - y_u x_v$.

On le note $\det(\vec{u}; \vec{v})$

Propriété Déterminant

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires, si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Propriété Parallélisme

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

Propriété Alignement

Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

Exercice 1 Exercice modèle

Dans un repère, les points $A(5; 8)$, $B(-3; -1)$ et $C(-1; 9)$ sont-ils alignés.

Correction :

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = -8 \times 1 - (-9) \times (-6) = -62$, donc $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) \neq 0$, les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

Exercice 2

Quels vecteurs sont colinéaires au vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$?

- $\vec{v} \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \end{pmatrix}$
- $\vec{w} \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} \begin{pmatrix} -20 \\ 15 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soient $A(5; 12)$, $B(-3; 0)$, $C(-4; -5)$ et $D(2, 4)$ quatre points du plan.

- Calculer les coordonnées de AB .
- Calculer les coordonnées de CD .
- Les vecteurs AB et CD sont-ils colinéaires?
- Que peut-on en déduire pour (AB) et (CD) ?

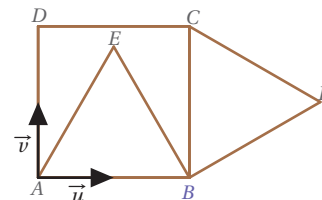
Exercice 4

Soient \vec{m} et \vec{n} deux vecteurs du plan. Les vecteurs $-12\vec{m} + 4\vec{n}$ et $9\vec{m} - 3\vec{n}$ sont-ils colinéaires?

Exercice 5 ★

Soient quatre points dans un repère orthonormé. E et F sont deux points tels que $\vec{AE} = -2\vec{AB}$ et $\vec{EF} = 7\vec{AD}$

- Déterminer les coordonnées de E .
- Montrer que les coordonnées de F sont $(9; -6)$
- Montrer que les points C , A et F sont alignés.

Exercice 6 ★

Dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) , $ABCD$ est un carré de côté de longueur 2, ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.

Les points D, E et F sont-ils alignés?