9 Vecteurs - Partie 2

Objectifs :

— Coordonnées de vecteur

— Coordonnées du milieu d'un segment

— Calcul de la norme d'un vecteur à partir des coordonnées.

— Définir une fonction

Cours vidéo 4 : Coordonnées de vecteurs.

Coordonnées d'un vecteur

Définition

Base orthonormée

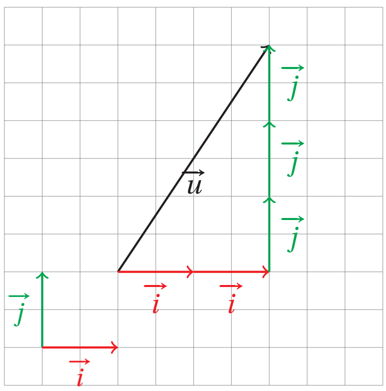
Une base de vecteurs est un couple $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de deux vecteurs non nuls qui **n'ont pas** la même direction.

Une base est **orthonormée** si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme des deux vecteurs est égale à 1.

Propriété

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base et $\vec{u}$ un vecteur.
Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
x et y sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Propriété

Opération sur les vecteurs

Soit une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, et k un nombre réel. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

— $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

— $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$

— $k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Propriété

Égalité de deux vecteurs

Soit, dans une base, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

Propriété

Soit, dans un repère, les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$

Dans ce repère, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple

Méthode : Calculer les coordonnées d'un vecteur

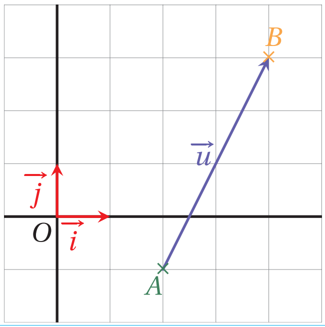
Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(2\ ;\ -1)$ et $B(4\ ;\ 3)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(4-2\ ;\ 3-(-1)\right)$

Donc $\overrightarrow{AB}(2\ ;4)$



Exercice 1 Déterminer les coordonnées d'un point

i ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soit $A(2;-3), B(4;5)$ et $C(-2;-1)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. On place le point D tel que ABCD est un parallélogramme.
   (a) Soit $(x_D; y_D)$ les coordonnées du point D.
   Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$.
   (b) En déduire x_D et y_D.

Exercice 2 Déterminer les coordonnées d'un point

Dans un repère, soit les points $A(1,2), B(-4,3)$ et $C(1,-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction en vidéo :

Milieu d'un segment

Propriété

Milieu d'un segment

I est le milieu de [AB], si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Propriété

Coordonnée du milieu d'un segment

Pour tout points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Exercice 3 ★

Correction en vidéo :

On considère (O, i, j) un repère du plan. Soit $A(2\ ;\ 3), B(-2\ ;\ 1)$ et $C(3\ ;\ -1)$.

1. Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Norme d'un vecteur

Propriété

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé et deux points A et B du plan tel que $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice 4 ★

On considère le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Correction en vidéo :

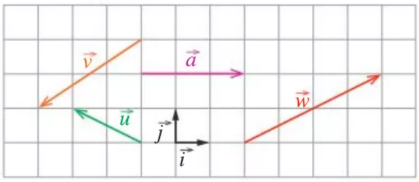
1. Soit u le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Calculer $\|\vec{u}\|$

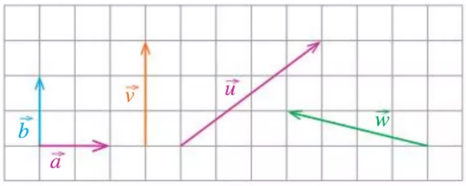
2. Soit $A(3\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -2)$ deux points dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   Calculer la distance AB.

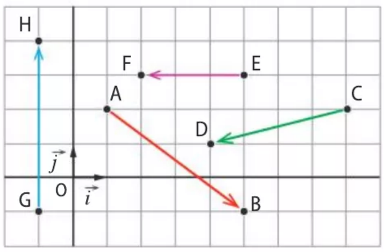
81 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



82 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.



83 **1.** Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.



2. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
b. Retrouver ces résultats par lecture graphique.

47 Dans un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

49 Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants

a. $-3\vec{w}$ **b.** $\vec{u}-\vec{v}$ **c.** $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

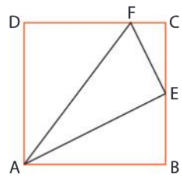
d. $2\vec{u}-3\vec{w}$ **e.** $\frac{1}{2}\vec{w}-\frac{3}{2}\vec{v}$

88 On considère le point A(–1 ; 3) et le vecteur $\vec{u}(2\,;-5)$.
Soit E le point tel que $\overrightarrow{AE}=\vec{u}$. On note $(x_E\,;y_E)$ ses coordonnées.
1. Justifier que : $x_E+1=2$ et $y_E-3=-5$.
2. En déduire les coordonnées de E.

89 Soit les points A(2 ; –5), B(2 ; 1) et C(5 ; –1).
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$, puis celles du point M défini par $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

85 On considère les points :
M(–3 ; 6), N(5 ; –1), P(11 ; 0) , Q(3 ; 7) et R(–10 ; 5).
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont égaux.
Que peut-on en déduire ?
2. Le quadrilatère MPNR est-il un parallélogramme ? Justifier.

27 ABCD est un carré. On place le milieu E de [BC] et le point F de [CD] tel que $CF=\frac{1}{4}CD$.



1. Le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est-il orthonormé ?
2. Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
3. Étudier la nature du triangle EFA.
4. Ce résultat reste-t-il vrai si ABCD est un rectangle ?

86 On considère les points :
E(–1 ; 7), F(3 ; –1), G(7 ; –9) et H(11 ; –17).
1. Montrer que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FG}$. Que peut-on en déduire ?
2. Le point G est-il le milieu du segment [FH] ? Justifier.

Exercice 5 ★★

Dans un repère, soit les points $A(4;-2)$, $B(-1;3,5)$, et $\Omega(3;2)$

1. Calculer les coordonnées de C et D pour que que ABCD soit un parallélogramme de centre Ω

Exercice 6

On considère le code `python`.

```
from math import *

def norme(x,y):
    return(sqrt(x**2 + y**2))
```

1. Que renvoie l'instruction `norme(3,4)`
2. Soit le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$. Quelle instruction permet de calculer sa norme.
3. En t'inspirant du code ci-dessus, définie en python une fonction nommée `distance` qui prend en parametre les coordonnées de 2 points (`xA,yA,xB` et `yB`) et renvoie la distance entre ces 2 points.