8

Fonctions affines et linéaires

•Vocabulaire :

fonction affine, fonction linéaire, pente, coefficient directeur, ordonnée à l'origine.

•Savoir-faire :

- Tracer une droite connaissant son équation réduite.
- Déterminer la pente d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Établir que trois points l'alignement de 3 points.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction affine à partir de son expression
- Résoudre une inéquation en utilisant les propriétés des fonctions affines,

Cours : Partie 1

Définition — Fonctions affines & vocabulaire

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p els que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
Les nombres m et p sont respectivement appelés **le coefficient directeur** et **l'ordonnée à l'origine** de f

Remarque — Cas particuliers

Si f est une fonction affine telle que :

- $m = 0$, alors la fonction f est une fonction **constante**.
- $p = 0$, alors la fonction f est une fonction **linéaire**

Propriété — Représentation graphique

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite

Propriété

Soit f, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx+p$ et a et b deux réels distincts, alors :

- $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- $p = f(a) - ma$

Exercice 1 Exercice modèle

Soit f une fonction affine $f(2) = 5$ et $f(8) = 3$, alors :

- $m = \dfrac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \dfrac{3 - 5}{8 - 2} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$
- $p = 5 - \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times 2 = 5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{3}$

On a donc : $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{17}{3}$

Exercice 2

Parmi les fonctions suivantes, lesquels sont des fonctions affines.

1. $f(x) = 3x^2 + 5$
2. $g(x) = 4 - \dfrac{1}{2}x$
3. $h(x) = \dfrac{2}{x} - 5$
4. $i(x) = 2x - \sqrt{3}$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

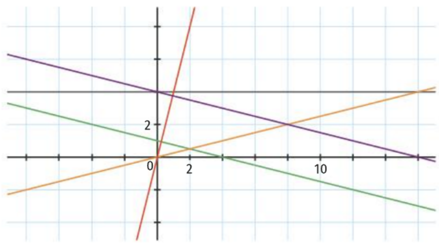
1. $f(x) = 3x + 5$
2. $g(x) = 4x - 12$
3. $h(x) = -2x + 2$
4. $i(x) = -7 + 3x$

Exercice 4

Soit f une fonction affine tel que $f(2) = 8$ et $f(6) = 24$.
Déterminer l'expression de f.

Exercice 5 ★

Associer chaque fonction affine suivante à sa représentation graphique.



- $f(x) = \frac{1}{4}x + 4$
- $g(x) = \frac{1}{4}x$
- $h(x) = 4$
- $i(x) = 4x$
- $j(x) = -\frac{1}{4}x + 1$

Exercice 6 ★

On considère les fonctions affines suivantes. Lesquelles d'entre elles ont une représentation graphique passant par le point C de coordonnées $(3\,;\,4)$?

1. $f_1(x) = 4x - 9$
2. $f_2(x) = -3x - 5$
3. $f_3(x) = -3x + 4$
4. $f_4(x) = 4x - 3$
5. $f_5(x) = -\frac{7}{3}x - 3$
6. $f_6(x) = 4$
7. $f_7(x) = -3$
8. $f_8(x) = -\dfrac{4}{3}x$

Cours : Variation

Propriété — Variation

Soit f, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$

- Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante.
- Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante.

Propriété — Equation

Soit f, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$

Propriété — Étude de signes

Soit f, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

1. Si $m > 0$, alors
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{p}{m}$.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Si $m < 0$, alors
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{p}{m}$.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 7 Exercice modèle

On considère la fonction :
$f(x) = (4x+7)(-3x+8)$.

Résoudre les inéquations $f(x) < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		$-\frac{8}{3}$		$+\infty$
$4x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 8 ★

Dans chaque cas, donner le sens de variation des fonctions affines suivantes :

1. $f(x) = -3x + 5 > 0$
2. $g(x) = x + 4$
3. $h(x) = 3 - 2x$

Exercice 9 ★

Résoudre les inéquations ci-dessous :

1. $8x + 5 > 0$
2. $\dfrac{3}{4}x + 8 < 0$
3. $-5x + \dfrac{3}{4} < 0$

Exercice 10 ★

Résoudre les inéquations ci-dessous :

1. $(4x+7)(3x-1) > 0$
2. $(3x+5)(4x-1) < 0$
3. $(-2x+1)(6x+5) < 0$

Exercice 11

Soient f et g, deux fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = 2x + 5$

Résoudre dans $[-5; 1]$ et interpréter graphiquement : $f(x) = g(x)$ et $f(x) < g(x)$

Exercice 12 ★

Résoudre les inéquations ci-dessous :

1. $(5x-3)(2x+1) > (5x-3)(4x-5)$
2. $(3x+5)^2 < (3x+5)(4x-1)$

Exercice 13 ★

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l' inéquation $\dfrac{3x-4}{2x+1} > 0$

1. Déterminer, en fonction de x , le signe de $3x - 4$ puis celui de $-2x + 1$
2. Rassembler les rép onses dans un tableau de signes et résoudre le problème.

FONCTION AFFINE
$f : x \mapsto mx + p$

La représentation graphique est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Pour tous réels distincts a et b
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

$p = 0$

- Fonction linéaire
- Fonction impaire
- Représentation graphique passant par l'origine

$m = 0$

- Fonction constante
- Fonction paire
- Représentation graphique parallèle à l'axe des abscisses

$m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		+	0	−	

$m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		−	0	+	