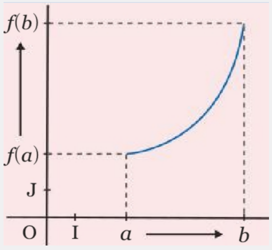
Fiche 1 : Notion de variations

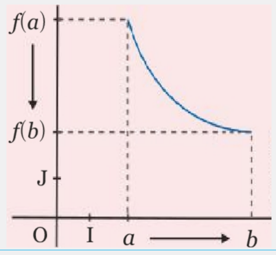
Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathscr{D}$.

Définitions

Vocabulaire

- f est dite **croissante** sur $\mathscr{D}$ lorsque pour tous réels a et b de $\mathscr{D}$ tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est dite **décroissante** sur $\mathscr{D}$ lorsque pour tous réels a et b de D tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.
- f est dite **monotone** sur D lorsqu'elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur D.
- f est dite **strictement** croissante ou décroissante lorsque les inégalités sont strictes.





Remarque : On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre. On dit qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

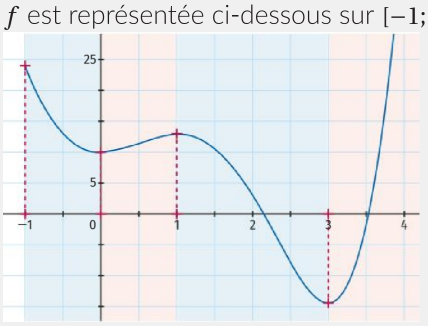
Définition

Tableau de variations

Pour représenter les variations d'une fonction f
- on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possible.
- si on les connaît, on écrit les images au bout des flèches. L'ensemble forme le tableau de variations de f.

Exemple

f est représentée ci-dessous sur $[-1; +\infty[$.



— f est décroissante sur $[-1\ ;\ 0] \cup [1\ ;\ 3]$

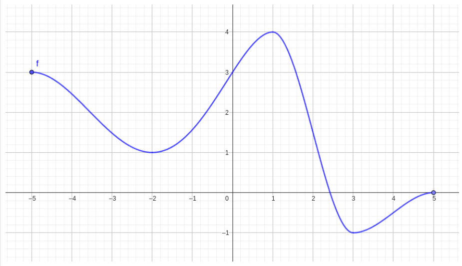
— f est croissante sur $[0; 1] \cup [3; +\infty[$

On peut résumer ces informations dans le tableau suivant :

x	-5		-3		0		4		7
$f(x)$	5	↘	-3	↗	4	↘	2	↗	6

Exercice 1

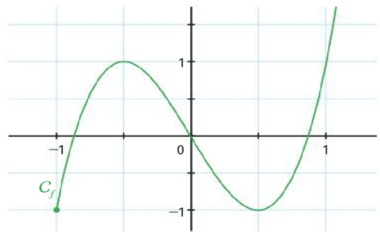
On considère la fonction f définie sur $[-5\ ;\ 5]$ dont la courbe représentative représentée dans le repère ci-contre.



1. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2 Comme au test

On considère la fonction f représentée dans le repère ci-contre.



1. Lire son ensemble de définition D
2. Préciser la valeur de ses éventuels extremums.
3. Dresser son tableau de variations sur D

Exercice 3 Comme au test

On considère le tableau de variations de f.

x	-8		-2		2		7		10
$f(x)$	5	↘	0	↗	4	↘	-3	↗	0

1. Préciser l'ensemble de définition D de f .
2. En utilisant les termes « croissante » et « décroissante », décrire les variations de f .
3. Peut-on affirmer que :
   (a) 4 est le maximum de f sur D ?
   (b) -3 est le minimum de f sur D ?
4. Comparer, en justifiant, les nombres suivants.
   (a) $f(-7)$ et $f(-5)$
   (b) $f(0)$ et $f(1)$
   (c) $f(2)$ et $f(3)$
5. Est-il possible de comparer $f(-4)$ et $f(0)$? Justifier.

• Extrémums

Définition — minimum & maximum

On dit que f admet un minimum m sur D lorsque, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$ et il existe $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = m$: m est la plus petite image par f.

On dit que f admet un maximum M sur D lorsque, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$ et il existe $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = M$: M est la plus grande image par f .

Remarques :
La valeur des extremums d'une fonction peut varier en fonction de l'intervalle sur lequel on se place. Une fonction n'admet pas obligatoirement un minimum ou un maximum.

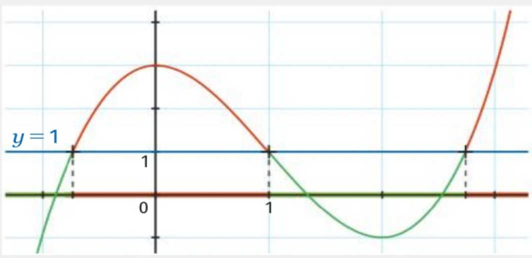
• Inéquation

Définition — Inéquations du type $f(x) \geq k$

Résoudre l'équation $f(x) \geq k$ consiste à déterminer tous les réels x de D dont l'image est supérieure ou égale à k.
Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k.

Exemple

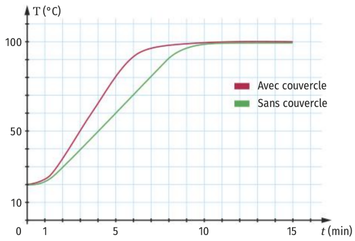
On considère la fonction f dont la courbe représentative est représentée ci-dessous :



$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-0,7;1] \cup [2,7;+\infty[$
$f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-0,7;1[\cup]2,7;+\infty[$
$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-0,7] \cup [1;2,7]$
$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-0,7[\cup]1;2,7[$

Exercice 4

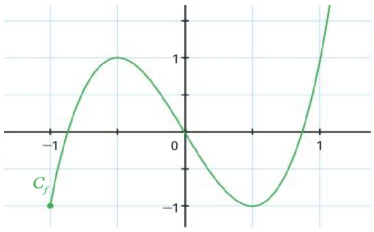
On a relevé la température de l'eau T en degré Celsius dans une casserole à feu léger, en fonction du temps t en minute, avec couvercle (A en rouge) et sans couvercle (S en vert) durant 15 min.



1. Déterminer et interpréter $A(0)$ et $S(0)$
2. Dresser le tableau de variations de A et S sur $[0 ; 15]$
3. (a) On suppose que $4 < t < 5$: encadrer $A(t)$ et (t)
   (b) La température de l'eau est comprise entre 70 et 80°C : encadrer t dans les deux cas.
   (c) La cuisson d'un aliment doit s'arrêter lorsque T = 90 °C : indiquer le gain de temps en mettant un couvercle

Exercice 5 ✎Comme au test

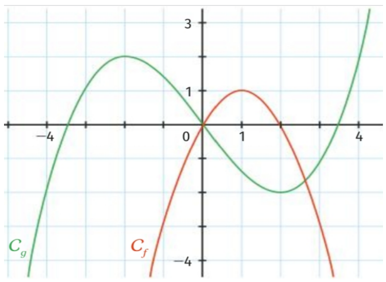
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on considère la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1;+\infty[$.



1. Résoudre $f(x) \geq 1$.
2. Résoudre $f(x) \leq -1$.

Exercice 6

On considère la représentation graphique des fonctions f et g dans un repère orthonormé.



1. Dresser le tableau de variations de chacune de ces deux fonctions sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
   (a) $f(x) \leq 3; f(x) > 0$
   (b) $g(x) \leq 0; g(x) > -2$
   (c) $f(x) \geq 1$

• Inéquations du type $f(x) \geq g(x)$

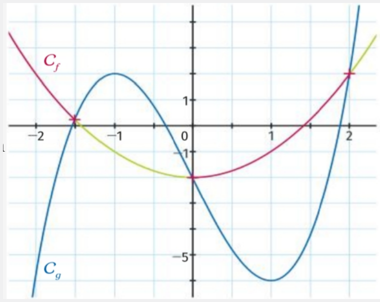
Soit f et g deux fonctions définient sur un intervalle D.

Définition — Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Résoudre consiste à déterminer tous les réels x de D dont l'image par f est supérieure ou égale à l'image par g. Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de C_f situés audessus ou sur C_g

Exemple

C_f et C_g admettent trois points d'intersection d'abscisses $-1,5; 0$ et 2.

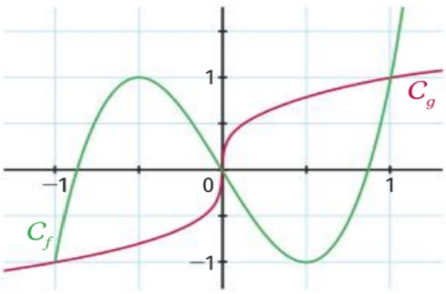


On a donc :

- $f(x) \geq g(x) \leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5] \cup [0; 2]$
- $f(x) > g(x) \leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5[\cup]0; 2[$
- $f(x) \leq g(x) \leftrightarrow x \in [-1,5; 0] \cup [2; +\infty[$
- $f(x) < g(x) \leftrightarrow x \in]-1,5; 0[\cup]2; +\infty[$

Exercice 7 ✎Comme au test

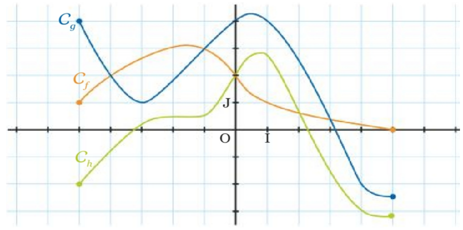
Sur le repère orthogonal ci-contre, on reprend la fonction f précédente et la courbe rouge représente une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



1. Résoudre $f(x) > g(x)$.

Exercice 8

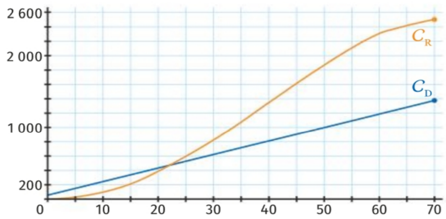
On a représenté dans un repère orthogonal lesreprésentations graphiques des fonctions f, g et h sur l'intervalle $[5; 5]$.



1. Tracer le tableau de variations de chaque fonction sur leur ensemble de définition.
2. Résoudre graphiquement sur l'intervalle [– 5 ; 5] :
   - $f(x) \geq g(x)$
   - $f(x) \geq g(x)$
   - $f(x) \geq g(x)$
   - $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
3. Pouvait-on déduire le résultat de la question d. à partir des résultats des questions a., b. et c. ? Justifier

Exercice 9

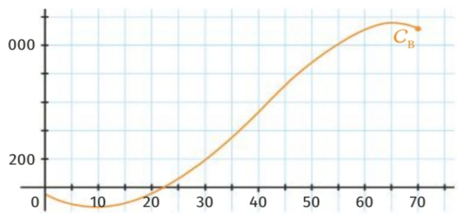
Une entreprise vend des objets. Sa capacité de production hebdomadaire est limitée à 70 objets.
On a représenté dans un repère orthogonal la recette en euros de la vente de x objets, notée $R(x)$ et la dépense correspondante notée $D(x)$.



1. (a) Déterminer l'ensemble E auquel appartient x.
   (b) Déterminer et interpréter $R(70) - D(70)$.
   (c) Résoudre dans E et interpréter :

   $D(x) = R(x)$; $\quad D(x) > R(x)$; $\quad D(x) < R(x)$

2. On a représenté dans un repère la fonction B définie pour tout $x \in [0; 70]$ par $B(x) = R(x) - D(x)$.



   (a) À l'aide de cette représentation graphique, retrouver les résultats obtenus dans la question 1.
   (b) Dresser le tableau de variations de B sur [0 ; 70].

3. Pour combien d'objets produits le déficit est-il le plus important ? Le directeur pense que, pour avoir un bénéfice maximum, il doit produire le plus d'objets possible. A-t-il raison ? Préciser.