7 Probabilité

Premières définitions

•Expérience aléatoire, issue et événement

Définition — Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat dépend du hasard.
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers de l'expérience.
On le note en général Ω.

Exemple

On lance un dé cubique et on regarde le nombre de la face du dessus.

1. Il s'agit bien d'une expérience aléatoire car on ne peut pas prédire le résultat avant le lancé.
2. L'univers est l'ensemble des nombres qu'il est possible d'obtenir : sur un dé cubique, il s'agit des nombres 1,2,3,4,5 et 6.
   On le notera $\Omega = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$

Définition — Issue ou événement élémentaire

On appelle, `issue` ou `événement élémentaire`, le résultat d'une expérience aléatoire.

Définition — Événement

On appelle `événement` un ensemble de plusieurs issues.

Exemple

En reprenant l'expérience du lancé d'un dé cubique :

- Obtenir un 2 est une issue (ou événement élémentaire)
- Obtenir un nombre pair est un événement constitué des issues obtenir un 2, obtenir un 4 et obtenir un 6

Probabilité

Théoreme — Loi des grands nombres

Lorsque que l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'obtenir un événement E se rapprochent d'une valeur théorique.

Définition — Probabilité

Cette valeur théorique s'appelle la **probabilité** de l'événement E.

Définition — Equiprobabilité

On dit qu'une expérience aléatoire est équiprobable si toutes ces issues ont la même probabilité.

Propriété — Propriétés élémentaires

1. La probabilité $P(E)$ d'un événement E est comprise entre 0 et 1 (inclus) :
   $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. La somme des probabilités de l'ensemble des issues est égale à 1.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

Exemple

Dans une urne, on dispose de 4 boules blanches indiscernable au toucher, 3 boules vertes et 2 boules rouges.
On tire une boule dans l'urne et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée.
On constate que l'urne contient 9 boules $(4+3+2)$

- La probabilité d'obtenir une boules vertes est donc $\frac{3}{9}$ (ou $\frac{1}{3}$).
- La probabilité d'obtenir une boule colorée (verte ou rouge) est donc $\frac{5}{0}$

Définition — Equiprobabilité

On dit qu'une expérience aléatoire est équiprobable si toutes ces issues ont la même probabilité.

Exemple

En reprenant toujours notre expérience aléatoire qui consiste à lancé un dé.
On est dans une situation **équiprobable**, le 1 à autant de chance de sortir que les autres.

Comme il y a 6 issues au total, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$.

Par exemple, la probabilité d'obtenir un 2, noté $P(2)$ sera $\frac{1}{6}$, on notera :
$P(2) = \dfrac{1}{6}$

La probabilité de l'événement E : "Obtenir un nombre pair" est :

$P(E) = P(2) + P(4) + P(6)$
$P(E) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}$
$P(E) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{3_{:3}}{6_{:3}} = \dfrac{1}{2}$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc $\dfrac{1}{2}$. (*Il y a une chance sur deux d'obtenir un nombre pair*)

•Événement contraire

Définition

Evénement contraire

Soit E un événement, on appelle événement contraire l'événement constitué de l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à E.
On le note $\overline{E}$ (prononcé "E barre")

Propriété

Soit E un événement.
$P(\overline{E}) = 1 - p(E)$

Démonstration

On considère une expérience aléatoire constituée de n issues $\Omega = i_1, i_2, \ldots, i_n$. Par construction, pour toute issue i_m,soit $i_m \in E$ soit $i_m \in \overline{E}$. Donc :
$P(E) + P(\overline{E}) = P(i_1) + P(i_2) + \cdots + P(i_n)$
$P(E) + P(\overline{E}) = 1$
$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Exemple

En reprenant toujours notre expérience aléatoire qui consiste à lancé un dé et l'événement E "obtenir un nombre pair".

- $\overline{E}$ est l'événement "Ne pas obtenir un nombre pair", c'est à dire "obtenir un nombre impair"
- $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$