Fonction exponentielle - Exercices de synthèse

Exercice 1

On pose une tasse de café à 80°C dans une pièce à température constante de 25°C.
On modélise la température du café (en °C) au bout de t minutes par la fonction :

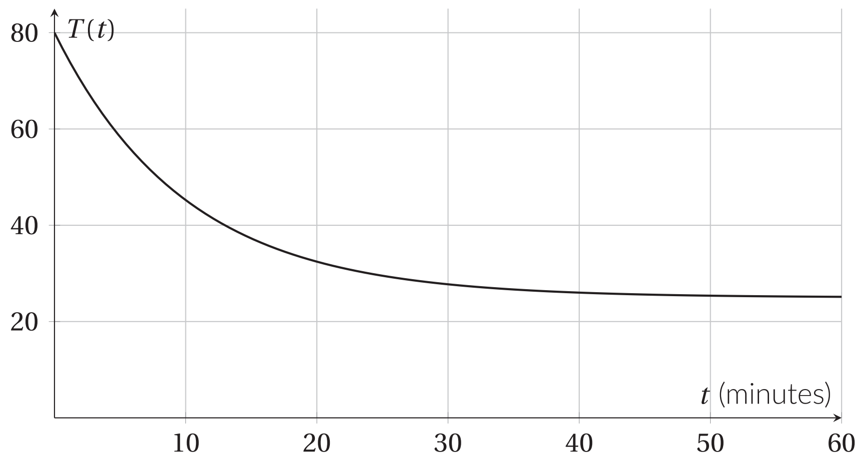
$$f(t) = 25 + 55e^{-0,1t}$$

Partie A — Premières observations

1. Calculer $f(0)$. Interpréter le résultat.
2. Calculer $f(10)$ et $f(30)$ (arrondir à l'unité).
3. Calculer la dérivée de f.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

PartieB — Étude graphique

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f.



1. Conjecturer graphiquement la valeur de $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$
2. Cette valeur est-elle cohérente avec le contexte ?
3. Résoudre graphiquement $f(t) \leq 40$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On cherche à déterminer au bout de combien de temps le café atteint 40°C.

1. Résoudre graphiquement :
$$f(t) = 40$$
2. Donner une valeur approchée du temps.

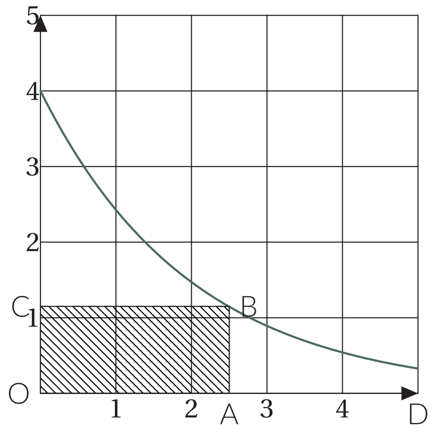
Exercice 2

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre.

Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation x = 5 et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x}$.

L'enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère et B un point de $\mathscr{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5 ; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.



1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0{,}5x}$ pour x dans l'intervalle $[0;5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0;5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$, on a $g(x) = (42x)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0;5]$. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.

Exercice 3

Après un incident industriel, une substance polluante est déversée dans un lac. On modélise la quantité de polluant (en tonnes) présente dans le lac au temps x (en jours) par la fonction :

$$f(x) = (3x + 27)\,\mathrm{e}^{-2x+8}$$

On s'intéresse à l'évolution de cette pollution dans le temps.

Partie A — Étude de la fonction

1. Déterminer l'expression de f', la dérivée de la fontion f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B — Interprétation

1. Montrer que f admet un maximum.
2. Déterminer ce maximum.
3. Interpréter ce résultat dans le contexte du problème. *(Que représente ce maximum pour la pollution du lac ?)*

   On cherche à savoir quand la pollution devient nulle.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Interpréter le résultat.