

Chapitre 8

Partie 2 : Exponentielle



Rappels

- R1 $(u \times v)' = u'v + uv'$
- R2 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- R3 $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$
- R4 Si pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = 0$ alors f est constante (c'est à dire que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ fixé).

Lemme

Si f est une fonction, définie et dérivable sur un domaine D_f , telle que :

- $f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Alors pour tout $x \in D_f$, $f(x) \neq 0$ (c'est à dire f ne s'annule jamais).

Démonstration

On considère la fonction $h(x) = f(x) \times f(-x)$

Montrons que h est constante en utilisant sa dérivée grace à R4

h est de la forme $u \times v$, avec :

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| • $u(x) = f(x)$ | • $v(x) = f(-x)$ |
| • $u'(x) = f'(x)$ | • $v'(x) = -f'(-x)$ |
| donc $u'(x) = f(x)$ car $f' = f$ | donc $v'(x) = -f(-x)$ car $f' = f$ |

On a donc :

$$h'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$h'(x) = f(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f(-x))$$

$$h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x)$$

$$h'(x) = 0$$

On en déduit que la fonction h est constante.

C'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = k$, pour tout $x \in D_f$.

Déterminons k en calculant par exemple $h(0)$.

$$h(0) = f(0) \times f(-0)$$

$$h(0) = f(0) \times f(0)$$

$$h(0) = 1 \times 1$$

$$h(0) = 1$$

Donc pour tout réel $x \in D_f$,

$$h(x) = 1$$

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

Comme le produit de $f(x)$ et $f(-x)$ n'est jamais nul, la fonction f ne s'annule jamais.

Propriété

La fonction exponentielle $\exp$

Il existe une unique fonction f telle que

- $f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée **exponentielle** et est notée **exp**.

Démonstration

Cette démonstration s'appuie sur les 2 mots *existe* et *unique*.

Il faudrait en principe démontrer l'existence de la fonction f et son unicité.

En classe de première l'existence sera admise.

- **existence** : admise
- **unicité** :

” Objectif :

On va supposer qu'il existe 2 fonctions f et g vérifiant les propriétés :

- $f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$
- $g'(x) = g(x)$
- $g(0) = 1$

Nous devons montrer que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'idée va être de montrer que $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, ce qui est équivalent car $f(x) \neq 0$.

✍ Début de la démonstration

D'après le lemme précédent f ne s'annule jamais, on peut donc considérer la fonction $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Montrons que h est constante en utilisant sa dérivée grâce à R4

$$\begin{aligned}\text{On a donc } h'(x) &= \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' \\ h'(x) &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} \\ h'(x) &= \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} \\ h'(x) &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction h est constante.

C'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = k$, pour tout $x \in D_f$.

Déterminons k en calculant par exemple $h(0)$.

$$\begin{aligned}h(0) &= \frac{g(0)}{f(0)} \\ h(0) &= \frac{1}{1} \\ h(0) &= 1\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}h(x) &= 1 \\ \frac{g(x)}{f(x)} &= 1\end{aligned}$$

$$g(x) = f(x)$$

Propriétés

- Par définition, la fonction exponentielle $\exp(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

- La fonction exponentielle $\exp(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$



A faire :

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Correction :



1. $f(x) = 5\exp(x) + x$

2. $g(x) = (3x - 1)\exp(x)$

3. $h(x) = \frac{\exp(x)}{3x^2 + 4x + 2}$

Propriétés

Propriétés algébriques

La fonction exponentielle a les mêmes propriétés algébriques que les puissances.

Donc pour tout x et $y \in \mathbb{R}$

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

- $(\exp(x))^y = \exp(x \times y)$



A faire :

Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour simplifier les

Correction :



1. $A = \exp(x + 3) \times \exp(x)$

2. $B = (\exp(x))^2 \times \exp(3x)$

3. $C = \frac{\exp(x - 1)}{\exp(x + 2)}$

Notation

Notation $\exp(x) = e^x$

Le nombre $\exp(1)$ est noté e . Une valeur approchée de ce nombre au millièm est 2,71828.

On sait que $\exp(an) = \exp(a)^n$, donc $\exp(n) = \exp(1n) = (\exp(1))^n = e^n$

Notation : Par extension de la propriété précédente à l'ensemble des réels, on note pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$



A faire : Les exercices se trouvent sur la fiche d'exercices

- 8 p.194

Correction :



- 9 p.194

Correction :



- 14 p.194

Correction :



- 16 p.195

Correction :



- 17 p.195

Correction :



Dérivée & variation

Dérivée de la fonction exponentielle

Définition

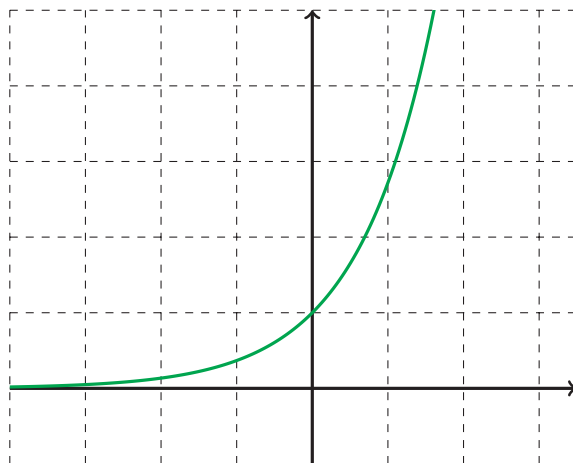
Par définition, on a :

$$(e^x)' = e^x$$

Propriétés

La fonction $\exp(x)$ strictement **positive**.
 $e^x > 0$

Alors la fonction exponentielle est **croissante**



Démonstration

»

Cette démonstration repose sur la continuité de la fonction $\exp(x)$. On va supposer qu'il existe un endroit où la fonction est négative et un où elle est positive.

La continuité va nous apporter le fait que la fonction va s'annuler.

Or on a prouvé que ceci était impossible dans le premier lemme du cours.

*Pour comprendre le principe de continuité, prenez 2 points, un en dessous de l'axe des abscisses et un au dessus, et essayer de relier **sans lever le stylo** les deux points, vous couperez forcément l'axe des abscisses.*

Supposons qu'il existe x_m tel que $e^{x_m} < 0$, alors comme $e^0 = 1$. On supposera pour la rédaction que $x_m < 0$.

- $e^{x_m} < 0$
- $e^0 > 0$
- e^x est continue sur $\mathbb{R}$

Il existe donc $x_z \in]x_m ; 0[$, tel que $e^{x_z} = 0$. Ce qui est impossible d'après le lemme.

Dérivée de la fonction e^u

Propriété

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$



A faire : Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{3x^2+4}$$

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-5x}$$

Correction :



Résoudre une équation avec la fonction exponentielle

Propriété

Pour tous nombres réels a et b .

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} e^a & = & e^b & & e^a & < & e^b & & e^a & > & e^b \\ \Leftrightarrow & a & = & b & \Leftrightarrow & a & < & b & \Leftrightarrow & a & > & b \end{array}$$

Démonstration

Ces propriétés découlent directement de la stricte croissance de la fonction $\exp$.

Nous allons démontrer la propriété sur l'équation $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Supposons que $e^a = e^b$ mais que $a \neq b$

On peut dire que $a < b$ (ou $a > b$ suivant les cas).

Comme $\exp$ est une fonction strictement croissante, alors :

$a < b \Rightarrow e^a < e^b$ or c'est en contradiction avec l'hypothèse de départ.



A faire : Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

Penser à utiliser si nécessaire les propriétés algébriques.

Correction :



$$\begin{array}{llll} 1. e^{3x+1} = e^x & 2. e^{3x-5} = 1 & 3. e^{(x^2)} = \frac{(e^x)^2}{e} & 4. e^{(x^2)} = \frac{1}{e^x} \end{array}$$



A faire : Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Correction :



$$\begin{array}{llll} 1. e^{5x+2} < e^{7x-4} & 2. (e^x)^3 > \frac{1}{e} & 3. e^{2x} - e^{1+x} < 0 & 4. 1 - e^{x^2+4x-8} > 0 \end{array}$$