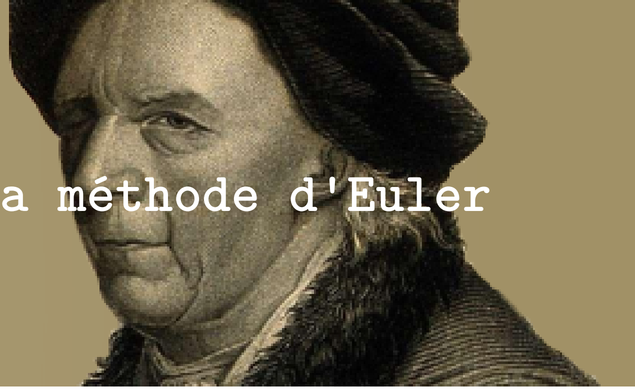


★ Approximation de exp(1) par la méthode d'Euler

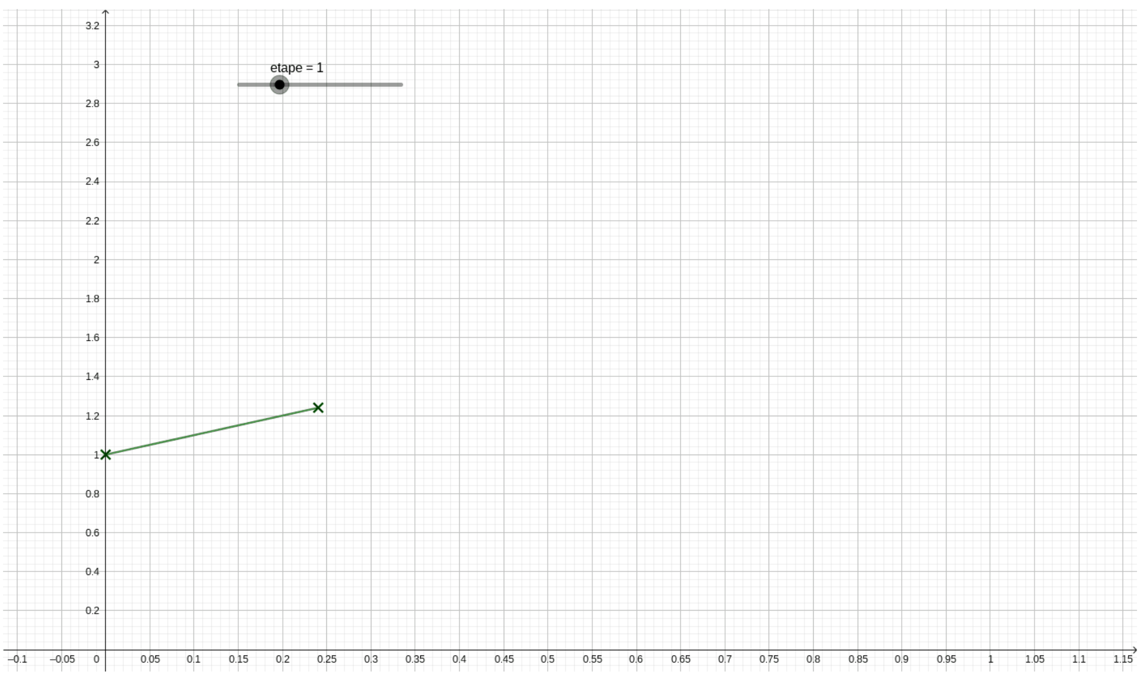
Découverte de la méthode d'Euler

> *i* Le but de ce TP est d'obtenir une valeur approchée de $\exp(1)$.

Rappel :

- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$

Principe :
La méthode d'Euler consiste en une série d'approximation de la fonction à l'aide de l'équation de la tangente. L'idée repose sur le fait que l'équation de la tangente est la meilleur approximation affine de la fonction. Donc pour tout a et un h proche de de 0, on peut donc avoir une valeur approchée de $f(a+h)$ à partir de l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a.



Déroulement :
On va couper l'intervalle $[0\,;1]$ en k parties (plus k est grand plus l'approximation sera bonne).
On note $h = \dfrac{1}{k}$. h représentera notre **pas**, c'est à dire qu'a chaque fois on avancera de h jusqu'à arriver à 1 (c'est à dire kh).

On va ensuite calculer les approximation suivantes $\exp(h), \exp(2h), \ldots, \exp((k-1)h)$ pour finir avec $\exp(1)$ à l'aide de l'équation de la tangente au point précédent :

C'est à dire :

- Pour calculer $\exp(h)$ on utilise l'équation de $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0.
- Pour calculer $\exp(2h)$ on utilise l'équation de $\mathcal{T}_h$ la tangente au point d'abscisse h.
- Pour calculer $\exp(3h)$ on utilise l'équation de $\mathcal{T}_{2h}$ la tangente au point d'abscisse $2h$.
- $\dots$
- Pour calculer $\exp(1)$ on utilise l'équation de $\mathcal{T}_{k+1}$ la tangente au point d'abscisse $(k-1)h$.

Exemple

Pour cet exemple, on choisit $k=4$, alors $h=\dfrac{1}{4}=0,25$.
On va donc calculer les approximation suivantes : $\exp(0,25)$, $\exp(0,5)$, $\exp(0,75)$ et enfin $\exp(1)$

Étape 1 :

— Déterminer l'équation de $\mathcal{T}_0$, la tangente à la courbe représentative de $\exp(x)$ au point d'abscisse 0.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

— A l'aide de l'équation de $\mathcal{T}_0$, déterminer l'approximation de $\exp(0,25)$.

. . . .

. . . .

. . . .

Étape 2 :

— Déterminer $\mathcal{T}_{0,25}$, l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\exp(x)$ au point d'abscisse 0,25.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

— A l'aide de l'équation de $\mathcal{T}_{0,25}$, déterminer l'approximation de $\exp(0,5)$.

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple

Étape 3 :
On recommence encore une fois pour obtenir un approximation 0,5

- Déterminer l'équation $\mathcal{T}_{0,5}$, de la tangente à la courbe représentative de $\exp(x)$ au point d'abscisse 0,5.

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- A l'aide de l'équation de $\mathcal{T}_{0,5}$, déterminer l'approximation de $\exp(0,75)$.

  ....

  ....

  ....

Étape 4 :
Une dernière fois,

- Déterminer l'équation $\mathcal{T}_{0,75}$, de la tangente à la courbe représentative de $\exp(x)$ au point d'abscisse $0,75$.

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- A l'aide de l'équation de $\mathcal{T}_{0,75}$, déterminer l'approximation de $\exp(1)$.

  ....

  ....

  ....

$\exp(1)$ est noté e, la constante d'Euler. D'après notre première approximation.

$$e = \dots$$

À l'aide de Python

i Pour obtenir une meilleur approximation, il faut augmenter k, ce qui réduira la taille du pas (h). Mais le nombre de calculs augmente aussi

— Compléter le code ci-dessous, pour que fonction `approximation_e` prenne en paramètre k et renvoie une approximation de e

```python
def approximation_e(k):
    pas =  ....
    x = ...
    fx = ...
    for _ in range( ... ):
        x = ...
        fx = ...
    return ...
```

— Quelle paramètre doit on donner à la fonction pour obtenir une approximation de e avec un pas de $0,01$.

. . . .

A l'aide d'une suite

On suppose que l'on va cette fois-ci diviser notre intervalle en k parties.
Ainsi $h = \dfrac{1}{k}$
Soit la suite (U_n) telle que U_n représente l'approximation de $\exp\left(\dfrac{n}{k}\right)$.
(c'est à dire le résultat intermédiaire obtenu à l'étape n).

On a donc $U_0 = 1$

Déterminer l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Dans ce cas particulier nous fixons $k = 1000$

— Déterminer l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n.

. . . .

. . . .

— Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.

. . . .

. . . .

— Calculer U_{1000}. Interpréter ce résultat.

. . . .

. . . .

. . . .