Le cercle trigonométrique et le radian

Cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le **sens direct** (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Enroulement

On considère la droite orientée tangente au cercle en $A(1,0)$. En « enroulant » cette droite autour du cercle, à tout réel x (longueur d'arc algébrique) correspond un unique point M du cercle.

Radian

Le **radian** (noté **rad**) est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle.

Un tour complet mesure $360°$ ou 2π radians.

Conversion : $x_{\text{rad}} = x_{\text{deg}} \times \dfrac{\pi}{180}$ $\qquad$ $x_{\text{deg}} = x_{\text{rad}} \times \dfrac{180}{\pi}$

Degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Mesure d'un angle orienté

Plusieurs mesures pour un même point

Un angle orienté a **plusieurs mesures** : si θ est une mesure, alors $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) en est une autre. On dit que l'angle est égal à θ **modulo** 2π.

Exemple : $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{4}$ correspondent au même point du cercle.

Angles négatifs

La droite orientée peut aussi s'enrouler dans le **sens négatif** (sens des aiguilles d'une montre), produisant des angles de mesure négative.

Exemple : le point associé à $-\frac{\pi}{4}$ est le même que celui associé à $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Mesure principale

La **mesure principale** d'un angle orienté est l'unique mesure appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple : l'angle de mesure $\frac{7\pi}{4}$ a pour mesure principale $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$.

Cosinus et sinus

Cosinus et sinus d'un réel

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M, noté $\cos x$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M, noté $\sin x$.

Propriétés fondamentales

Pour tout réel x et tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *(relation de Pythagore)*
3. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ *(parité / imparité)*
4. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ *(périodicité 2π)*
5. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
6. $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercices

Exercice 1 — B — Angles associés

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

1. En utilisant la symétrie du cercle par rapport à l'axe des ordonnées, donner $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
2. En utilisant la parité du cosinus, donner $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
3. Donner tous les réels $x \in [0\,;\,2\pi]$ vérifiant $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Réponse

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 2 — C — Du cercle à la courbe

1. Compléter le tableau par lecture du cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin(x)$					

2. En utilisant $\sin(-x) = -\sin(x)$, déduire les valeurs pour $x \in \left\{-\pi\,;\,-\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right\}$.
3. Que peut-on dire de la courbe de sin par rapport à l'origine ? Justifier avec la propriété utilisée.
4. Dans un repère, placer tous les points obtenus et esquisser la courbe de $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Réponse

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 3 — D — Parité et périodicité

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est **paire**.
3. Montrer que f est **périodique** de période 2π.

Réponse

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 4 — E — Périodicité et parité

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x)$$

1. Montrer que f est **périodique** de période π.
2. Déterminer la **parité** de la fonction f.

Réponse

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .