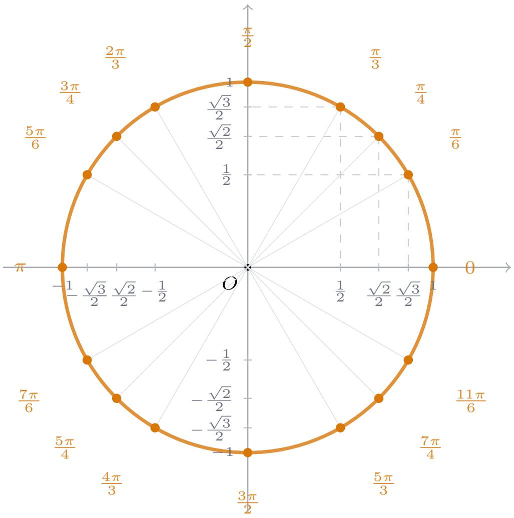
Fonctions trigonométriques — Exercices

Cercle trigonométrique — Valeurs remarquables



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Symétries :
- cos$(-x) =$ cos(x) *(parité)*
- sin$(-x) = -$sin(x) *(imparité)*
- cos$(x + 2\pi) =$ cos(x), sin$(x + 2\pi) =$ sin(x)
- cos$(x + \pi) = -$cos(x), sin$(x + \pi) = -$sin(x)
- cos$(\pi - x) = -$cos(x), sin$(\pi - x) =$ sin(x)
- cos$(x + \frac{\pi}{2}) = -$cos(x), sin$(x + \frac{\pi}{2}) =$ sin(x)

Exercice 13 p. 100

Sans calculatrice, donner la valeur exacte des nombres suivants.

1. sin$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 2. cos$\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 3. sin$\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
2. cos$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 5. cos$\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ 6. sin$\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

Exercice 22 p. 100

Donner la valeur exacte des deux expressions suivantes.

$A = \sqrt{2}$ sin$(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{3}$ cos$(\frac{\pi}{6})$ $B =$ sin$(\frac{\pi}{6}) -$cos$(\frac{\pi}{2})$

Exercice 24 p. 100

On admet : cos$\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

En déduire la valeur exacte de sin$\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 39 p. 100

Recopier et compléter les tableaux par lecture graphique sur le cercle trigonométrique.

1.

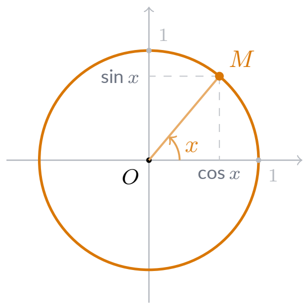
x	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
cos(x)					
sin(x)					

2.

x	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$
cos(x)					
sin(x)					

Exercice 15 p. 100

On considère sur le cercle trigonométrique le point M image du réel x.



1. Placer les points N et P images de $x + \frac{\pi}{2}$ et $x + \pi$.
2. Donner cos$(x+\frac{\pi}{2})$, sin$(x+\frac{\pi}{2})$, cos$(x+\pi)$ et sin$(x+\pi)$ en fonction de sin x et cos x.

Exercice 55 p. 100

1. Résoudre chacune des équations suivantes.
   a. $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
   b. $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}\,x - \frac{1}{2} = 0$
   c. $x^2 - 1 = 0$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : sin$(a)\,x^2 - 2\,$cos$(a)\,x -$ sin$(a) = 0$
3. En quoi généralise-t-elle les équations de la question 1 ?

Exercice A — Parité et périodicité

Sans calculatrice, utiliser la **parité** et la **périodicité** pour donner la valeur exacte.

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **2.** $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **3.** $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

2. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ **5.** $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ **6.** $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right)$

Exercice B — Angles associés

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

1. En utilisant la symétrie du cercle par rapport à l'axe des ordonnées, donner $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
2. En utilisant la parité du cosinus, donner $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
3. Donner tous les réels $x \in [0\,;\,2\pi]$ vérifiant $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice C — Du cercle à la courbe

1. Compléter le tableau par lecture du cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin(x)$					

2. En utilisant $\sin(-x) = -\sin(x)$, déduire les valeurs pour $x \in \{-\pi;\ -\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\}$.
3. Que peut-on dire de la courbe de sin par rapport à l'origine ? Justifier avec la propriété utilisée.
4. Dans un repère, placer tous les points obtenus et esquisser la courbe de $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice F — Mesure principale

Donner la mesure principale dans $]-\pi\,;\,\pi]$ de l'angle x vérifiant :

1. $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$
2. $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = 0$
3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice G — Équations trigonométriques

1. Donner **toutes** les valeurs $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Donner les valeurs $x \in [0\,;\,2\pi]$ vérifiant $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Donner **toutes** les valeurs $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sin(x) = -1$.

Exercice D — Parité et périodicité

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est **paire**.
3. Montrer que f est **périodique** de période 2π.

Exercice E — Périodicité et parité

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x)$$

1. Montrer que f est **périodique** de période π.
2. Déterminer la **parité** de la fonction f.