Chapitre 02

Suites arithmétiques

• Définition & premières propriétés

→ Une suite (u_n) est dite `arithmétique` si pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \end{tikzcd}$$

Définition

Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout

$$n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

.

Le nombre r est appelé `raison` de la suite (u_n).

→ La définition précédente est une définition par récurrence, on retrouvera la définition explicite de la suite (u_n) sous le nom terme général de la suite.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+n\times r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 & \cdots & u_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

Propriété

Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0, alors :

$$u_n = u_0 + r \times n$$

→ Il se peut que le terme initial de la suite ne soit pas u_0, dans ce cas on peut utiliser suivant le cas, l'une des formules ci-dessous :

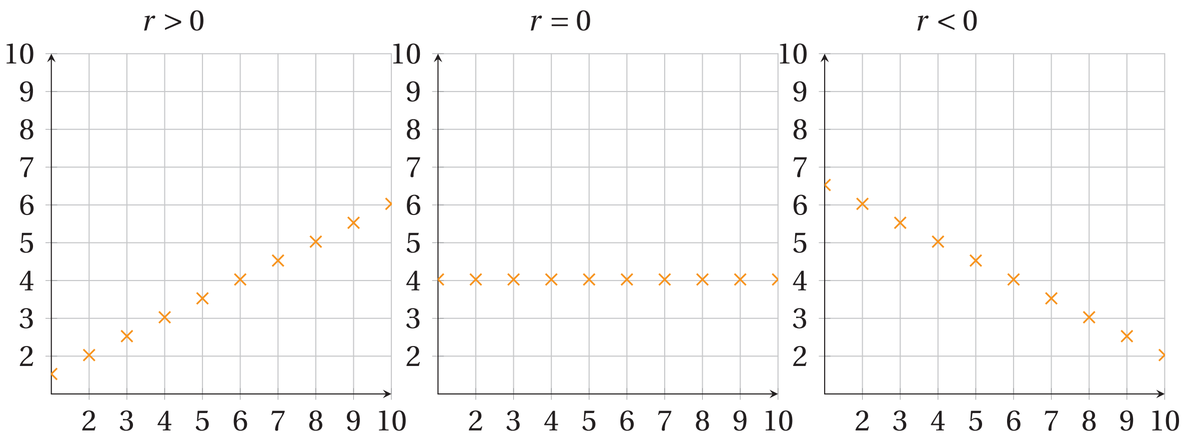
- $u_n = u_1 + r \times (n-1)$
- $u_n = u_p + r \times (n-p) \qquad p \in \mathbb{N}$

• Variations & représentation graphique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante.
- si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.



• Limite

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r, alors :

- Si $r < 0$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

- Si $r = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0$$

- Si $r < 0$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

• Somme

Propriété

Somme des n premiers entiers

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

On note S la somme des n premiers entiers.

$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

On a donc :
$2S = n + 1 + n + 1 + \ldots + n + 1 + n + 1$
$2S = n(n+1)$
$S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique. La somme des termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$. Calculer la somme S des 10 premiers termes de cette suite.

" *Attention la suite commençant à 0 le 10ème terme est* u_9

$u_9 = u_0 + 9 \times r = 4 + 9 \times 2 = 22$

Ainsi $S = 10 \times \dfrac{4 \times 22}{2} = 10 \times 44 = 440$

Suites géométriques

• Définition & premières propriétés

→ Une suite (v_n) est dite `géométrique` si pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre q

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 & \cdots & v_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Définition

Suite géométrique

Une suite (v_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout

$$n \in \mathbb{N}: \qquad v_{n+1} = v_n \times q$$

.

Le nombre q est appelé `raison` de la suite (v_n).

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 & \cdots & v_{n-1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_n
\end{tikzcd}$$

Propriété

Terme général

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0, alors :

$$v_n = u_0 \times q^n$$

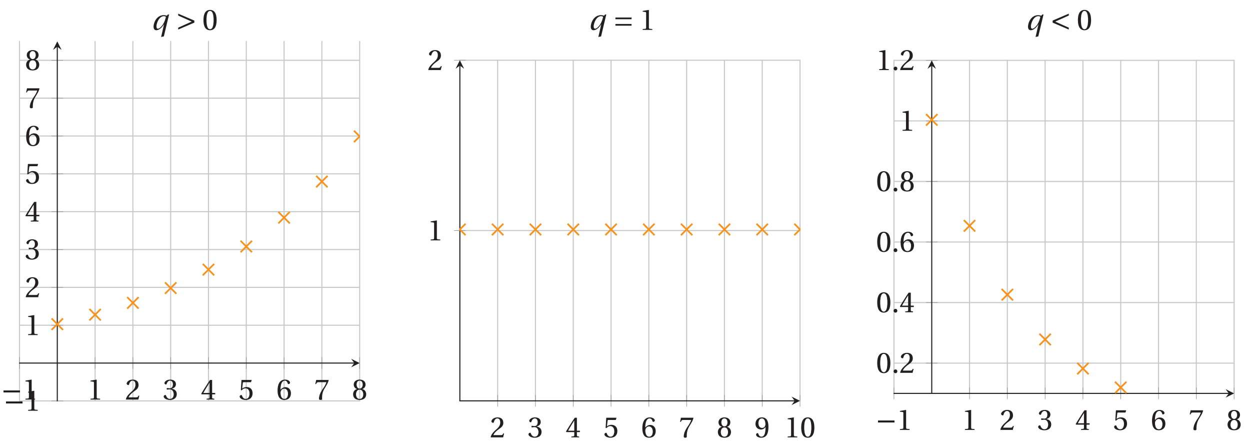
→ Il se peut que le terme initial de la suite ne soit pas v_0, dans ce cas on peut utiliser suivant le cas, l'une des formules ci-dessous :

- $v_n = v_1 \times q^{n-1}$
- $v_n = v_p \times q^{n-p}$ $\qquad p \in \mathbb{N}$

• Variations & représentation graphique

Propriété — Variation de q^n

On considère la suite (q^n) , pour $n \in \mathbb{N}$:



- si $q>1$, la suite $\left(q^n\right)$ est croissante.
- si $0<q<1$, la suite $\left(q^n\right)$ est décroissante.
- si $q=1$, la suite $\left(q^n\right)$ est constante.
- sur $\mathbb{N}^*$, si $q=0$, la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

Propriété — Variation d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0, alors

- si $u_0>0$, alors les variations de la suite v_n sont les mêmes que celle de $\left(q^n\right)$.
- si $u_0<0$, alors les variations de la suite v_n sont les mêmes que celle de $\left(q^n\right)$.

• Limite

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison r, alors :

- Si $-1<q<1$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$
- Si $q>1$
  - Si $v_0>0$
    $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
  - Si $v_0<0$
    $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$
- Si $q<-1$
  La suite (v_n) n'admet pas de limite.

• Somme

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique. La somme des termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de terme}}}{1-q}$$

Démonstration

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

$S = v_p(1 + q + \cdots + q^{n-p})$

Donc :

$qS = v_p(q + q^2 + \ldots q^{n-p+1})$

Par soustraction, on obtient :

$S - qS = v_p\left(1 + q + \cdots + q^{n-p}\right) - v_p\left(q + q^2 + \ldots q^{n-p+1}\right)$

$S - qS = v_p\left(1 + q + \cdots + q^{n-p} - q - q^2 - \cdots - q^{n-p+1}\right)$

$S - qS = v_p\left(1 + \cancel{q} + \ldots + \cancel{q^{n-p}} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \ldots. - q^{n-p+1}\right)$

$S - qS = v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right)$

$S(1-q) = v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right)$

$$S = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initiale $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_5$.

$S = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S = 3 \times \dfrac{1-2^{5+1}}{1-2}$

$S = 3 \times \dfrac{1-2^6}{-1}$

$S = 3 \times \dfrac{-63}{-1}$

$S = 189$