Exercice 1 Collecte solidaire

Une association de quartier lance une collecte pour financer l'achat de matériel scolaire. Grâce au bouche-à-oreille, aux affiches et à l'arrivée de nouveaux bénévoles, la somme récoltée *augmente régulièrement* chaque semaine.

- Semaine 1 : l'association récolte **20 €**.
- Chaque semaine suivante, elle récolte **12 €** de plus que la semaine précédente.

On note u_n la somme (en euros) récoltée pendant la semaine n, et S_n la somme totale récoltée au bout de n semaines.

1) Calculer u_{10}, la somme récoltée pendant la 10^{e} semaine.
2) À partir de combien de semaines la collecte **dépasse-t-elle 2000 €** (au total) ?

Correction

1) La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1 = 20$ et de raison $r = 12$.

$$u_n = u_1 + (n-1)\times 12$$

$$u_{10} = 20 + (10-1)\times 12 = 20 + 108 = 128$$

Donc, pendant la 10^{e} semaine, l'association récolte **128 €**.

2) On a d'abord

$$u_n = 20 + (n-1)\times 12 = 12n + 8.$$

La somme des n premiers termes vaut

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\big(20 + (12n+8)\big) = \frac{n}{2}(12n+28) = n(6n+14) = 6n^2 + 14n.$$

On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 2000$, soit

$$6n^2 + 14n - 2000 > 0.$$

Résolvons l'équation associée $6n^2 + 14n - 2000 = 0$.

$$\Delta = 14^2 - 4\times 6\times(-2000) = 196 + 48000 = 48196, \qquad \sqrt{\Delta} \approx 219{,}54.$$

$$n = \frac{-14 \pm \sqrt{\Delta}}{12} \;\Rightarrow\; n \approx \frac{-14 + 219{,}54}{12} \approx 17{,}13.$$

On teste alors les entiers :

$$S_{17} = 6\times 17^2 + 14\times 17 = 1972\ (< 2000), \qquad S_{18} = 6\times 18^2 + 14\times 18 = 2196\ (> 2000).$$

Donc la collecte **dépasse 2000 € à partir de la 18^{e} semaine**.

Exercice 2 Défi sportif

Une classe lance un défi sportif : chaque lundi, on réalise plus de pompes que la semaine précédente.

- Semaine 1 : **12 pompes**
- Chaque semaine : **+3 pompes**

On note u_n le nombre de pompes réalisées la semaine n.

1) Calculer u_5 puis u_{10}.

2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) On note S_{10} le total de pompes sur les 10 premières semaines. Calculer S_{10}.

Correction

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1 = 12$ et de raison $r = 3$.

1)
$$u_5 = 12 + (5-1)\times 3 = 12 + 12 = 24, \qquad u_{10} = 12 + (10-1)\times 3 = 12 + 27 = 39.$$

2)
$$u_n = u_1 + (n-1)r = 12 + 3(n-1) = 3n + 9.$$

3) La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique vaut
$$S_n = \frac{n}{2}\big(2u_1 + (n-1)r\big).$$
Donc
$$S_{10} = \frac{10}{2}\big(2\times 12 + 9\times 3\big) = 5(24+27) = 5\times 51 = 255.$$
Ainsi, le total sur 10 semaines est **255 pompes**.

Exercice 3 Festival

Pour décorer un festival, une équipe installe des guirlandes chaque jour en augmentant le rythme.

- Jour 1 : **30 m**
- Chaque jour : **+10 m**

On note u_n la longueur (en m) installée le jour n.

1) Calculer u_7.
2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Calculer S_7, la longueur totale installée durant les 7 premiers jours.
4) Si une guirlande coûte **2,20 €** par mètre, calculer la dépense totale sur les 7 jours.

Correction

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1 = 30$ et de raison $r = 10$.

1)
$$u_7 = 30 + (7-1)\times 10 = 30 + 60 = 90.$$

2)
$$u_n = 30 + (n-1)\times 10 = 10n + 20.$$

3)
$$S_7 = \frac{7}{2}\big(2\times 30 + (7-1)\times 10\big) = \frac{7}{2}(60+60) = \frac{7}{2}\times 120 = 420.$$
Donc la longueur totale installée sur 7 jours est **420 m**.

4) Dépense totale :
$$420 \times 2{,}20 = 924.$$
La dépense est donc **924 €**.

Exercice 4 Géométrie

Un club d'arts plastiques fabrique une série de **cadres carrés** pour une exposition. Le côté du premier cadre mesure **10 cm**. À chaque nouveau cadre, on augmente le côté de **2 cm**. On note c_n la longueur du côté (en cm) du n^{e} cadre, et p_n son périmètre.

1) Donner c_1, c_2, c_3, puis exprimer c_n en fonction de n.
2) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{12}.
3) On fabrique les **12 cadres** : quelle longueur totale de baguette (en cm) faut-il prévoir, c'est-à-dire calculer $P = p_1 + p_2 + + p_{12}$?
4) Convertir la longueur totale en mètres.

Correction

1) On a $c_1 = 10$, $c_2 = 12$, $c_3 = 14$. La suite (c_n) est arithmétique de raison 2 :

$$c_n = 10 + (n-1) \times 2 = 2n + 8.$$

2) Le périmètre d'un carré est $p_n = 4c_n$, donc

$$p_n = 4(2n+8) = 8n + 32.$$

$$p_{12} = 8 \times 12 + 32 = 96 + 32 = 128 \text{ cm}.$$

3)
$$P = \sum_{n=1}^{12} p_n = \sum_{n=1}^{12} (8n+32) = 8 \sum_{n=1}^{12} n + 32 \times 12.$$

Or $\sum_{n=1}^{12} n = \frac{12 \times 13}{2} = 78$, donc

$$P = 8 \times 78 + 384 = 624 + 384 = 1008 \text{ cm}.$$

4) Conversion : 1008 cm $= 10{,}08$ m.