

0

Suites numériques - Partie A

Objectifs

- Connaître et utiliser les différents modes de génération d'une suite.
- Etudier les variations d'une suite.
- Conjecturer la limite d'une suite.

Généralités

Définition

Définition & notations

Une suite numérique (U_n) est une liste **ordonnée** de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté U_n .

On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par U :

$$\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow U(n) = U_n \end{cases}$$

Définition

U_n (se lit "u indice n") est appelé le **terme de rang n de la suite**

Par exemple :

$$U_{10} = 14$$



Remarque

On pourra rapprocher la notation U_n de la notation fonctionnelle $U(n)$, en gardant bien à l'esprit que $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$.

A faire :

La liste 50; 25; 12,5; 6,25 ...

définit les premiers termes de la suite (U_n) telle que $U_0 = 50$

Déterminer :

1. $U_2 = \dots$
2. $U_4 = \dots$

Correction en vidéo :



A faire :

La liste 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

définit les premiers termes de la suite (V_n) telle que $V_1 = 2$

Déterminer :

1. $V_2 = \dots$
2. $V_6 = \dots$

Correction en vidéo :



Définition

Définition explicite d'une suite

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n s'exprime en fonction de l'entier n .

Dans ce cas, on peut calculer chaque terme directement à partir de rang n .

Exemple

1. Pour tout entier naturel n , on donne $U_n = 5n + 1$. Calculer U_0, U_3, U_{10}
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on donne $V_n = \sqrt{n-1}$. Calculer V_1, V_5, V_{10} .

Correction :

$$U_n = 5n + 1$$

Pour $n = 0$

$$U_0 = 5 \times 0 + 1 = 1$$

Pour $n = 3$

$$U_3 = 5 \times 3 + 1 = 16$$

Pour $n = 10$

$$U_{10} = 5 \times 10 + 1 = 51$$

$$V_n = \sqrt{n-1}$$

Pour $n = 1$

$$V_1 = \sqrt{1-1} = 0$$

Pour $n = 5$

$$V_5 = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$$

Pour $n = 10$

$$V_{10} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$$

Définition

Définition par récurrence

Une suite est définie par une **relation de récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de :

1. son premier terme ;
2. une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent, $u_{n+1} = f(u_n)$.



Remarque

Dans ce cas, pour calculer un terme u_n , il faut avoir le terme qui le précède u_{n-1} .

Exemple

Calculer les termes d'une suite définie par récurrence

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Calculer u_4 ?

Ici, pour pouvoir calculer u_4 , on va devoir calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$u_1 = 2u_0 - 5$	$u_2 = 2u_1 - 5$	$u_3 = 2u_2 - 5$	$u_4 = 2u_3 - 5$
$= 2 \times (-5) - 5$	$= 2 \times (-15) - 5$	$= 2 \times (-35) - 5$	$= 2 \times (-75) - 5$
$= -15$	$= -35$	$= -75$	$= -155$

A faire :

Calculer les quatre premiers termes des suites ci-dessous :

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne :

$$U_n = 3n^2 - 1.$$

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne :

$$\begin{cases} V_{n+1} = 2V_n - 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

Correction en vidéo :



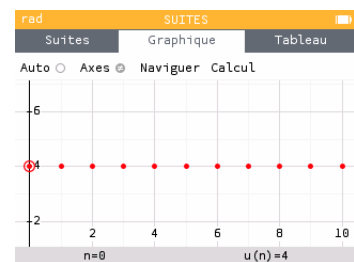
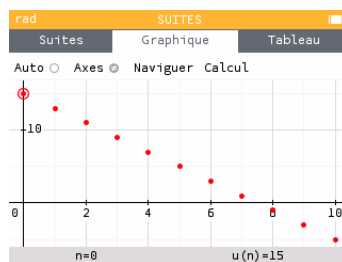
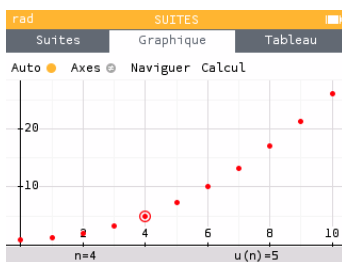
Définition

- On dit qu'une suite (U_n) est **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$.
- On dit qu'une suite (U_n) est **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1}$.
- On dit qu'une suite (U_n) est **constante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_{n+1}$, respectivement $U_n > U_{n+1}$.



Remarque

- On dit qu'une suite est **monotone**, lorsqu'elle est toujours croissante ou toujours décroissante.
- On dira qu'une suite est strictement croissante ou strictement décroissante, si les inégalités sont strictes.



Propriétés

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les variations d'une suite. On considère une suite (U_n) .

- **Méthode 1 (générique) :** Etude du signe de $U_{n+1} - U_n$. Pour connaître les variations d'une suite (U_n) , on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0$, alors la suite (U_n) est croissante,
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante,
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 0$, alors la suite (U_n) est constante,
- **Méthode 2 (suite strictement positive) :** Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$, alors :
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, alors la suite (U_n) est croissante,
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, alors la suite (U_n) est décroissante,
 - si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$, alors la suite (U_n) est constante,
- **Méthode 3 (suite explicite) :** Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = f(n)$, alors :
 - si pour tout $f(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (U_n) est croissante,
 - si pour tout $f(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (U_n) est décroissante,
 - si pour tout $f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (U_n) est constante,